Ich zeige dir jetzt noch etwas, das du noch nicht sehen konntest, weil du zuletzt die Zahl Φ nur auf 3 Stellen nach dem Komma genau genommen hast. Berechne die Folge noch einmal, aber jetzt mit einer hohen Genauigkeit von 20 Stellen nach dem Komma.

«| Gut, ich bin schon gespannt, was du mir damit zeigen willst.

⋮
1364,00073313743585739000
842,99881375871035776400
521,00191937872549962600
321,99689437998485813800
199,00502499874064148800
122,99186938124421665000
76,01315561749642483800
46,97871376374779181220
29,03444185374863302660
17,94427190999915878560
11,09016994374947424100
6,85410196624968454460
4,23606797749978969640
2,61803398874989484820
1,61803398874989484820
1,00000000000000000000
0,61803398874989484820
0,38196601125010515180
0,23606797749978969640
0,14589803375031545540
0,09016994374947424100
0,05572809000084121400
0,03444185374863302700
0,02128623625220818700
0,01315561749642484000
0,00813061875578334000
0,00502499874064150000
0,00310562001514184000
0,00191937872549974000
0,00118624128964210000
0,00073313743585764000
⋮

|» Siehst du es? Die Zahlen, die kleiner als 1 sind, sind wieder genau die gleichen wie »oben«, allerdings ohne den ganzzahligen Teil – man sieht das aber nur bei jeder zweiten Zahl. Es ist der gleiche Effekt wie bei der Differenz zu den ganzen Zahlen. Mal ist der Wert etwas darüber, mal etwas darunter. Und alle Zahlen, die kleiner als 1 sind, sind nichts anderes als der Kehrwert zu den jeweiligen »oberen« Zahlen. Dadurch, dass man das gleiche Ergebnis auch bekommt, wenn man nach »oben« jeweils mit Φ multipliziert, bekommt man das Ergebnis nach »unten«, indem man durch Φ dividiert.

Diese »Wachstumsformel« funktioniert also sowohl »von innen nach außen« als auch von »unten nach oben«. Es ist egal, ob man die Folge durch Addition gewinnt oder durch Multiplikation – sie ist identisch. Die Zahl ist »in sich selbst gespiegelt«. Sie wurde vor sehr langer Zeit auch *Goldene Zahl* genannt und ist heute unter dem Begriff *Goldener Schnitt* auch außerhalb der Mathematik bekannt.

Aus meiner Sicht ist das Bemerkenswerteste die Tatsache, dass sie nicht genau berechenbar ist, dass auch bei noch so genauer Berechnung immer ein winziger Rest bleibt, den man noch genauer berechnen könnte.

«| Doch! Verlängere die oberste Zeile, in welcher die fettgedruckten Potenzwerte stehen, weiter nach rechts! Mach es so wie auf einer normalen Zahlengeraden, da geht es »unterhalb« von 0 mit –1, –2, … etc. weiter. Und dann liegt die mittelgraue 1 unterhalb der Potenz –1.

|» Ja, prima!! Das würde sogar stimmen, denn der Wert rechts vom Komma der Zahl Φ entspricht ja tatsächlich ihrem Kehrwert. Kehrwerte[1] schreibt man in der Mathematik auch als »hoch minus 1«. Schreiben wir es auf:

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\Phi} \Rightarrow 0{,}61803 = \frac{1}{1{,}61803}$$

«| Ich mache dir noch einen Vorschlag: Wir haben in der Tabelle bereits zwei schräg laufende graue Linien eingezeichnet. Zeichnen wir probehalber eine weitere parallel dazu verlaufende Linie ein – ich strichliere den Rahmen:

10	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	**–1**	**–2**
										1		
									1		1	
								1		2		
							1		3		0	
						1		4		2		
					1		5		5			
				1		6		9		2		
			1		7		14		7			
		1		8		20		16		2		
	1		9		27		30		9			
1		10		35		50		25		2		

Tabelle 8

|» Ah, ich sehe, du hast auch bereits eine 0 in der strichlierten Linie eingezeichnet! Wir hatten ja vorhin gesagt, dass rechts von der »2er-Spalte« lauter Nullen sein müssten. Aber passt das auch zu der strichlierten Linie? Sehen wir uns doch den »Verlauf« der strichlierten Linie von links unten nach rechts oben an: 35, 27, 20, 14, 9, 5, 2, 0.

$$\begin{array}{rcr}
35 - \mathbf{8} &=& 27 \\
27 - \mathbf{7} &=& 20 \\
20 - \mathbf{6} &=& 14 \\
14 - \mathbf{5} &=& 9 \\
9 - \mathbf{4} &=& 5 \\
5 - \mathbf{3} &=& 2 \\
2 - \mathbf{2} &=& 0 \\
0 - \mathbf{1} &=& -1
\end{array}$$

«| Heehh! Halt, stopp! Was machst du denn da?

1 In der Mathematik auch »reziproker Wert« genannt

|» Wieso?

«| Na, du bist über die 0 hinausgegangen ...

|» Das stimmt nur zum Teil. Ich habe von den Werten einen fortlaufend um 1 geringeren Betrag abgezogen, und zwar so lange, bis dieser abzuziehende Betrag 1 war. Schau auf die *fettgedruckten* Werte in der Mitte der Auflistung!
(8 7 6 5 4 3 2 1)

«| Ah! Ja gut, dann haben wir jetzt auch einen Wert für das bisher leer gebliebene strichlierte Feld, nämlich –1. Das ist auch wirklich passend, denn dadurch ergibt sich für die strichlierte 0 sogar eine richtige Addition (nach der gleichen Vorgangsweise wie bei den anderen Zahlen):

$$1+(-1)=0$$

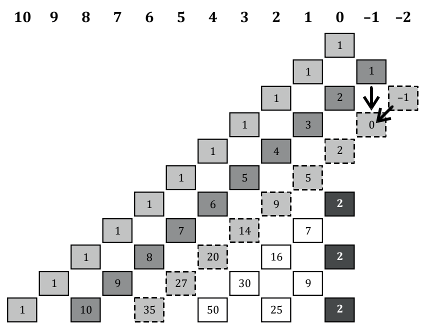


Tabelle 9

Mhm. Der Wert –1 ist zwar eigenartig, aber ich denke, über die Vorzeichen sollten wir uns vorerst nicht allzuviele Gedanken machen, denn auf der »linken« Seite der Tabelle sind sie ja ebenfalls manchmal alternierend, obwohl in unserer Tabelle ausschließlich positive Werte eingetragen sind.

Ich möchte jetzt bei den nichtganzzahligen Teilen der Potenzen von Φ weitermachen. Sie entsprechen immer dem Kehrwert der jeweiligen Potenz von Φ, also

Tabelle 27a

													Zeilensumme	Potenz
												1	1	0
											1		1	1
										1		2	3	2
									1		3		4	3
								1		4		2	7	4
							1		5		5		11	5
						1		6		9		2	18	6
					1		7		14		7		29	7
				1		8		20		16		2	47	8
			1		9		27		30		9		76	9
		1		10		35		50		25		2	123	10
	1		11		44		77		55		11		199	11
1		12		54		112		105		36		2	322	12

Zu beachten ist der Wert an der Spitze des Dreiecks. Die hellgraue Linie besteht durchgehend aus der Ziffer 1, während die dunkelgrau Linie durchgehend aus der Ziffer 2 besteht. Das ist jedoch kein Widerspruch, beide Werte sind richtig. In Tabelle 27b sehen wir die 1 an der Spitze. Sie ergibt sich, wenn wir die Folge der gerundeten Potenzen von Φ aufschreiben.

Tabelle 27b

													Zeilensumme	Potenz
												1	**1**	**0**
											1		1	1
										1		2	3	2
									1		3		4	3
								1		4		2	7	4
							1		5		5		11	5
						1		6		9		2	18	6
					1		7		14		7		29	7
				1		8		20		16		2	47	8
			1		9		27		30		9		76	9
		1		10		35		50		25		2	123	10
	1		11		44		77		55		11		199	11
1		12		54		112		105		36		2	322	12

Tabelle 27c

													Lucas-Folge
												2	**2**
											1		1
										1		2	3
									1		3		4
								1		4		2	7
							1		5		5		11
						1		6		9		2	18
					1		7		14		7		29
				1		8		20		16		2	47
			1		9		27		30		9		76
		1		10		35		50		25		2	123
	1		11		44		77		55		11		199
1		12		54		112		105		36		2	322

Verwenden wir den »dunkelgrauen« Wert 2, so entspricht dieser dem ersten Element der Lucas-Folge (Tabelle 27c).

«| Wir haben hier allerdings ein bisschen geschummelt!

|» Wieso?

«| Weil wir nur den ganzzahligen Teil von Φ genommen haben. Die Werte sind nur gerundet und nicht exakt!

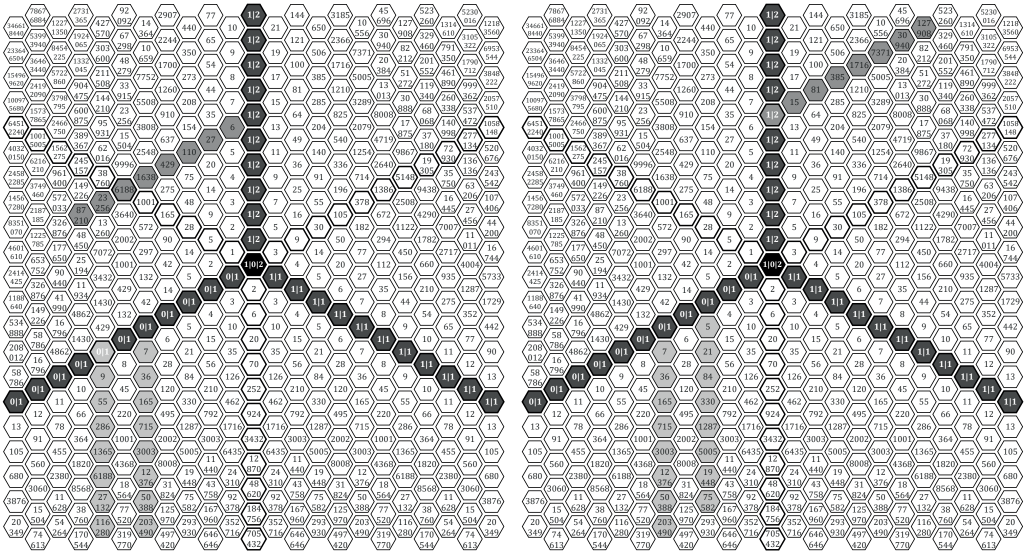


TABELLE 39

Verfolgt man in TABELLE 38 den »Fortschritt« der Linie in Sektor B, scheint es, dass ab Station »F« die beiden Linien im Sektor A nur mehr am unteren Ende einen Versatz aufweisen. Wo ist dieser am oberen Ende geblieben? Das Rätsel kann leicht gelöst werden, indem wir die zugehörige Differenzenliste betrachten:

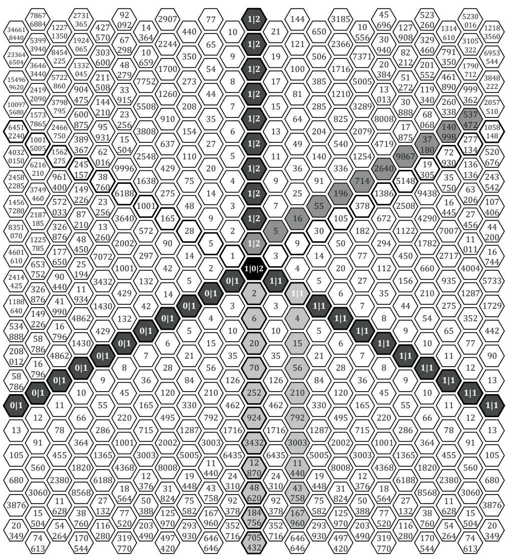


TABELLE 40

$$\begin{array}{rcrcr}
2 & - & 0 & = & 2\\
6 & - & 1 & = & 5\\
20 & - & 4 & = & 16\\
70 & - & 15 & = & 55\\
252 & - & 56 & = & 196\\
924 & - & 210 & = & 714\\
3432 & - & 792 & = & 2640\\
12870 & - & 3003 & = & 9867\\
48620 & - & 11440 & = & 37180\\
184756 & - & 43758 & = & 140998\\
705432 & - & 167960 & = & 537472\\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Die 0 in der ersten Zeile (2 – 0 = 2) ist unsichtbar!

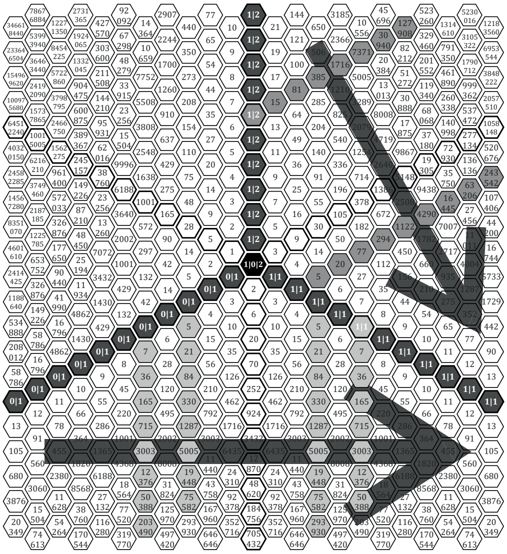


TABELLE 41

Die »wandernde Linie« im Sektor B wird nicht an einer Grenzlinie »reflektiert« (wie das im Sektor C der Fall ist), sondern läuft ungehindert nach rechts unten weiter – es gibt hier (genauso wie im Sektor A) keine »Randlinie«, an welcher eine Reflexion auftreten könnte.

|» Was mich brennend interessieren würde: Wir haben nun in allen Sektoren »Differenzlinien« gefunden. Die Zahlen in den Sektoren werden aber durch eine *Summen*bildung erzeugt ...

«| Du meinst, ob es auch in gleicher Weise »Summenlinien« zu finden gibt? Die Antwort ist: Ja! Zwischen den Sektoren A und B gibt es einen sehr schönen Summen-Zusammenhang – als Beispiel möge die TABELLE 42 dienen:

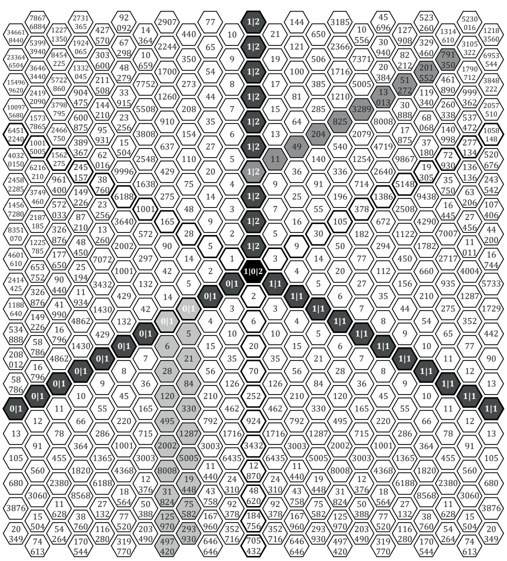
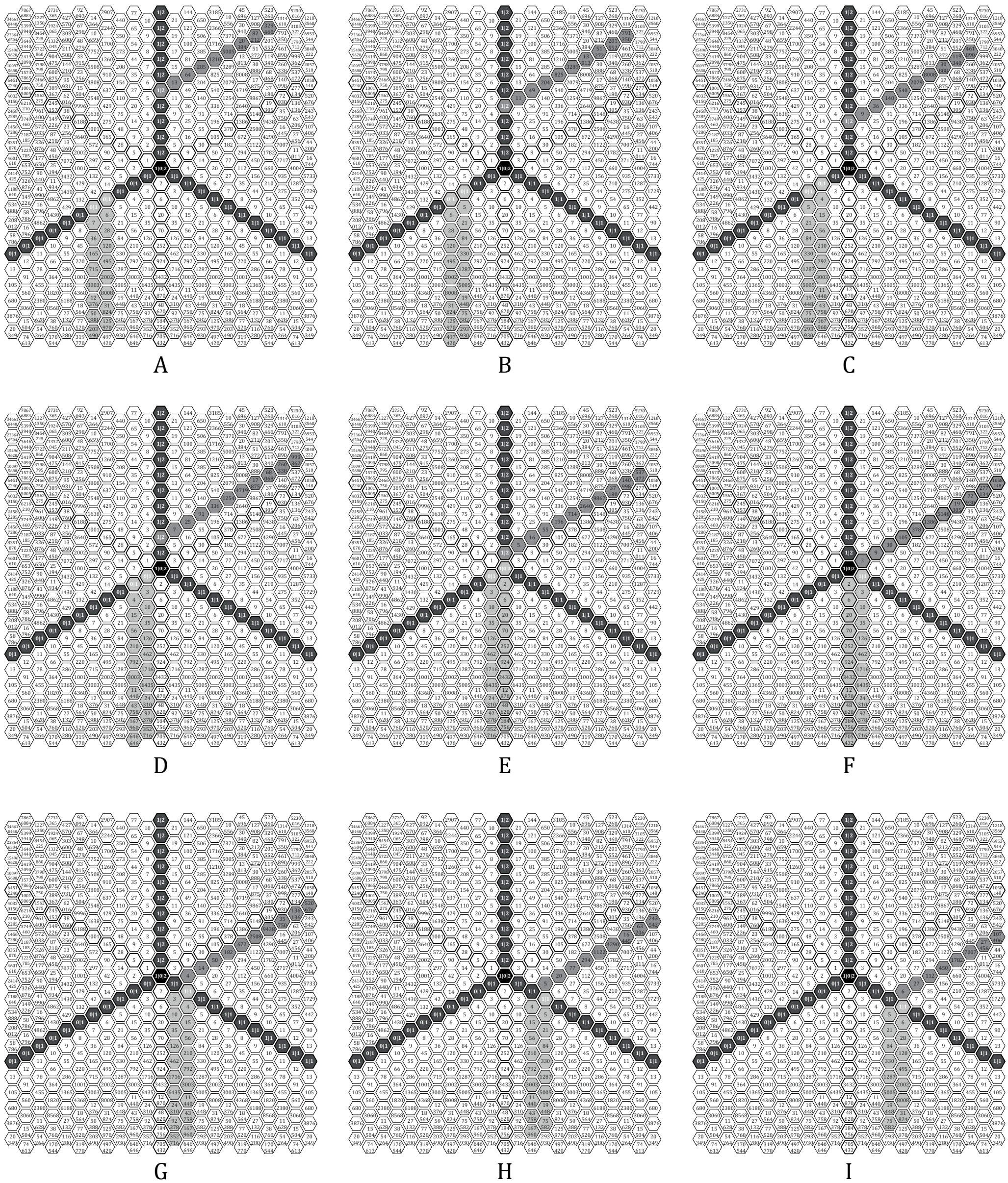


TABELLE 42

1 +	1 =	2
6 +	5 =	11
28 +	21 =	49
120 +	84 =	204
495 +	330 =	825
2002 +	1287 =	3289
8008 +	5005 =	13013
31824 +	19448 =	51272
125970 +	75582 =	201552
497420 +	293930 =	791350
⋮	⋮	⋮

Die beiden Linien, welche die zu addierenden Zahlen liefern, liegen im Sektor A vertikal nebeneinander – der Unterschied zu den Differenzlinien besteht darin, dass zwischen den beiden Linien *kein Abstand* ist.

Die »Laufrichtung« der Linien ist identisch mit jener in der TABELLE 41. Zwischen den Sektoren A und C habe ich bisher keinen Summen-Zusammenhang gefunden. TABELLE 43 lässt den Verlauf der Summenlinien erkennen:



A B C

D E F

G H I

TABELLE 43

|» Was jetzt noch fein wäre: ein Summen-Zusammenhang zwischen den Sektoren B und C. Hat deine Spürnase diesbezüglich etwas finden können?

«| Sie hat! Allerdings in etwas anderer Form, als ich mir das ursprünglich vorgestellt hatte. Ich habe zwischen den beiden Sektoren nämlich einen Zusammenhang zwischen Differenz- und Summenlinien gefunden! Die Tabelle 44 zeigt dir, wie das zustande kommt:

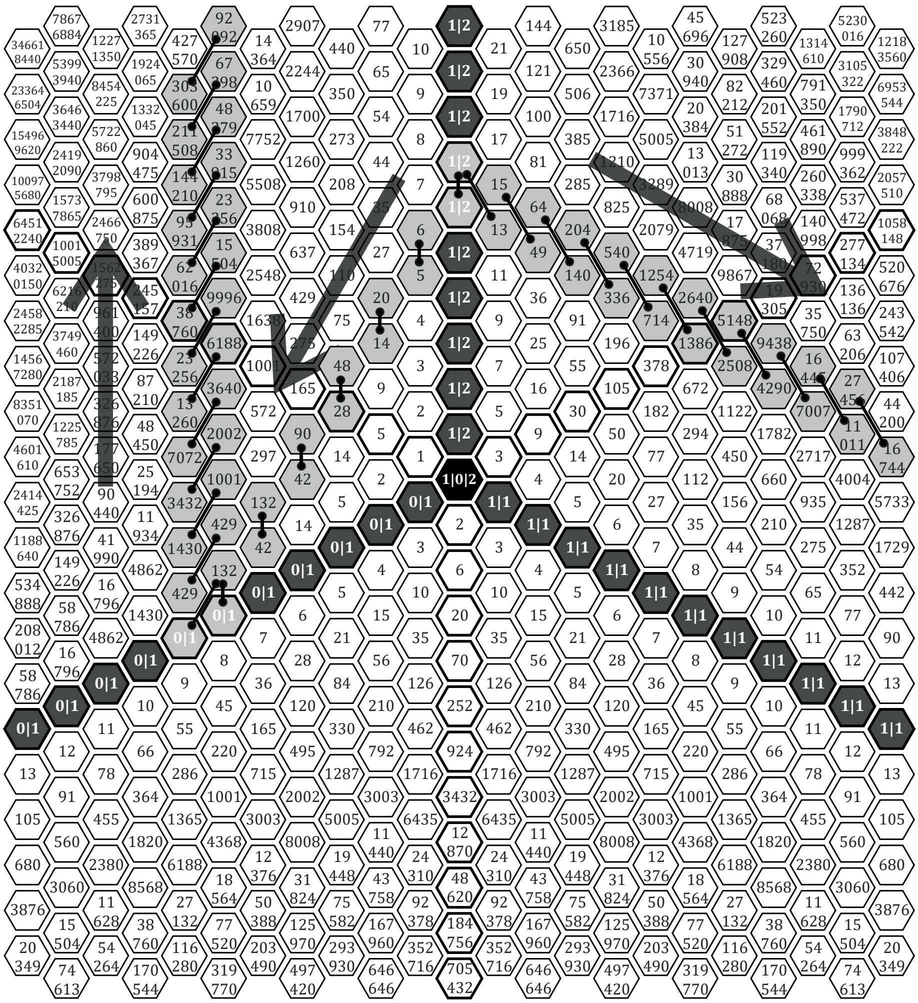


Tabelle 44

Es gibt in beiden Sektoren jeweils Linien, die aus »Zahlen-Pärchen« bestehen. Die *Differenz* zwischen den Zahlen-Pärchen in Sektor B entspricht jeweils der *Summe* eines Zahlenpärchens in Sektor C. In der Tabelle 44 habe ich die Pärchen »zusammengenäht«, damit man sieht, welche Zahlen Paare bilden. Das wirklich Spannende dabei ist, dass es aussieht, als handle es sich um einen einzigen »Strahl«, der zweimal »umgelenkt« bzw. »gespiegelt« wird. Wenn man genauer hinsieht, bemerkt man aber, dass es sich um zwei Linien handelt, die den gleichen Ursprung genau an der Grenzlinie zwischen B und C haben. Um das Ganze anschaulicher zu machen, habe ich eine Liste mit den »Differenz-Summen« erstellt:

0 −	2 =	−2 = −	(1 +	1)
2 −	13 =	−11 = −	(5 +	6)
15 −	49 =	−34 = −	(14 +	20)
64 −	140 =	−76 = −	(28 +	48)
204 −	336 =	−132 = −	(42 +	90)
540 −	714 =	−174 = −	(42 +	132)
1254 −	1386 =	−132 = −	(0 +	132)
2640 −	2508 =	132 =	(132 +	0)
5148 −	4290 =	858 =	(429 +	429)
9438 −	7007 =	2431 =	(1430 +	1001)
16445 −	11011 =	5434 =	(3432 +	2002)
27456 −	16744 =	10712 =	(7072 +	3640)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Im Sektor C verläuft die Linie mit den Summen-Pärchen erst mal *horizontal* bis zur gegenüberliegenden Randlinie »0«. Dort wird sie gespiegelt und verläuft ab hier parallel zur Randlinie »1« weiter ins Unendliche. Ich habe den ersten Teil der Strecke ganz bewusst als *horizontal* bezeichnet, denn die drei Sektoren kennen in Wahrheit kein »oben« oder »unten«. Wir betrachten im Sektor A die Linie 1–7–21–35–35–21–7–1 als horizontal – und wenn wir den gesamten »Dreieckskreis« um 120° gegen den Uhrzeigersinn drehen, dann liegt anschließend die Linie 1–6–20–48–90–132–132–0 ebenfalls horizontal an der gleichen Stelle.

Die Spiegelung an der »0«-Linie des Sektors C erfolgt bei jenem Zahlenpärchen (0 + 132), das in der Differenz-Summen-Liste am Übergang zwischen grauem und weißem Hintergrund steht. Im Sektor B überspringt das Pärchen, das als erstes

Berechnung der Potenzen von Φ

Es folgt nun ein kurzer Abschnitt, der sich mit der Berechnung der Potenzen von Φ befasst. Φ ist ja, wie wir bereits wissen, eine *irrationale Zahl* mit unendlich vielen, nicht periodisch auftretenden Stellen nach dem Komma. Und einigermaßen aufwendig ist daher die Berechnung ihrer Potenzen, da wir dafür die Zahl immer wieder mit sich selbst multiplizieren müssen.

Glücklicherweise verfügt unsere Wunderzahl aber über Eigenschaften, die uns das Potenzieren sehr erleichtern bzw. sogar komplett ersparen.

Ich gehe zunächst von dieser bereits bekannten Formel aus:

$$\boxed{\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}}$$

Mit dieser Formel habe ich zugleich auch die 1. Potenz von Φ berechnet, denn es gilt die triviale Tatsache:

$$\Phi^1 = \Phi$$

Um die 2. Potenz von Φ zu berechnen, muss ich die erste Potenz einmal mit sich selbst multiplizieren. Normalerweise schreiben wir dafür:

$$\Phi \cdot \Phi = \Phi^1 \cdot \Phi^1 = \Phi^{1+1} = \Phi^2$$

Für jede weitere Potenz müssen wir nur je ein weiteres Mal mit Φ multiplizieren:

$$
\begin{aligned}
\Phi^2 \cdot \Phi^1 &= \Phi^3 \\
\Phi^3 \cdot \Phi^1 &= \Phi^4 \\
\Phi^4 \cdot \Phi^1 &= \Phi^5 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Das können wir beliebig oft wiederholen.

In der Praxis werden wir dafür wohl meistens einen Taschenrechner verwenden und dort z. B. für die Berechnung der 9. Potenz von Φ Folgendes eintippen:

[1] [,] [6] [1] [8] [0] [3] [4] [x^y] [9] [=]

Als Ergebnis erhalten wir anschließend auf dem Display die Zahl 76,0132 (bei einer 4-stelligen Genauigkeit nach dem Komma).

Haben wir keinen Taschenrechner zur Hand, wird es deutlich mühsamer. Denn um die 9. Potenz von Φ »von Hand« zu berechnen, bleibt uns nichts anderes übrig, als Φ 7-mal mit sich selbst zu multiplizieren. Ich habe mich hier nicht vertippt, ich meine tatsächlich 7-mal. Denn die erste Potenz brauchen wir nicht auszurechnen, das ist die Zahl Φ selbst. Für die 2. Potenz zählen wir einfach 1 dazu – das haben wir bereits gelernt. Erst ab der 3. Potenz müssen wir tatsächlich rechnen.

Es geht aber auch viel einfacher. Denn die »Grund-Formel«

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

lässt sich (durch Multiplikation mit Φ auf beiden Seiten der Gleichung) umformen zu

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

(auch dies ist uns schon bekannt). In der Folge muss nun auch gelten:

$$\Phi^3 = \Phi^2 \Phi = (\Phi + 1)\Phi = \Phi^2 + \Phi = (\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 1$$

Mit diesem Ergebnis wird das Rechnen »von Hand« bereits wesentlich einfacher, denn eine Multiplikation mit 2 erfordert weitaus weniger Rechenschritte als eine Multiplikation mit 1,618034....

Die 4. Potenz kann ich nun mit diesem »Trick« ebenfalls sehr einfach berechnen:

$$\Phi^4 = \Phi^3 \Phi = (2\Phi + 1)\Phi = 2\Phi^2 + \Phi = 2(\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 2 + \Phi = 3\Phi + 2$$

Ich berechne auf die selbe Weise nun auch noch die 5. Potenz:

$$\Phi^5 = \Phi^4 \Phi = (3\Phi + 2)\Phi = 3\Phi^2 + 2\Phi = 3(\Phi + 1) + 2\Phi = 3\Phi + 3 + 2\Phi = 5\Phi + 3$$

Wir erkennen bereits das Muster, wie weitere Potenzen entstehen, ohne dass wir viel rechnen müssen:

$$\begin{array}{lcrr}
\Phi^1 & = & 1\,\Phi \pm & 0 \\
\Phi^2 & = & 1\,\Phi + & 1 \\
\Phi^3 & = & 2\,\Phi + & 1 \\
\Phi^4 & = & 3\,\Phi + & 2 \\
\Phi^5 & = & 5\,\Phi + & 3 \\
\Phi^6 & = & 8\,\Phi + & 5 \\
\Phi^7 & = & 13\,\Phi + & 8 \\
\Phi^8 & = & 21\,\Phi + & 13 \\
\Phi^9 & = & 34\,\Phi + & 21 \\
\Phi^{10} & = & 55\,\Phi + & 34 \\
\vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Hier liegen sie uns lang ausgestreckt zu Füßen, unsere Freunde, die Fibonacci-Zahlen! :-)

Um die oben erwähnte 9. Potenz von Φ auszurechnen, genügt es also, wenn wir Φ mit 34 multiplizieren und 21 dazuzählen – wir erhalten das gleiche Ergebnis.

Gibt es für negative Potenzen ebenfalls eine so einfache »Abkürzung«? Ja, auch die negativen Potenzen können wir, ausgehend von unserer »Grund-Formel«

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

leicht berechnen. Wir können die Formel nämlich auch auf folgende Weise aufschreiben:

$$\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1 \text{ bzw. } \Phi^{-1} = \Phi - 1$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\Phi^{-2} &= \Phi^{-1}\Phi^{-1} = (\Phi-1)(\Phi-1) = \Phi^2 - 2\Phi + 1 = \Phi + 1 - 2\Phi + 1 = -\Phi + 2 \\
\Phi^{-3} &= \Phi^{-2}\Phi^{-1} = (-\Phi+2)(\Phi-1) = -\Phi^2 + 3\Phi - 2 = -(\Phi+1) + 3\Phi - 2 = 2\Phi - 3 \\
\Phi^{-4} &= \Phi^{-3}\Phi^{-1} = (2\Phi-3)(\Phi-1) = 2\Phi^2 - 5\Phi + 3 = 2(\Phi+1) - 5\Phi + 3 = \\
&= 2\Phi + 2 - 5\Phi + 3 = -3\Phi + 5 \\
\Phi^{-5} &= \Phi^{-4}\Phi^{-1} = (-3\Phi+5)(\Phi-1) = -3\Phi^2 + 8\Phi - 5 = \\
&= -3(\Phi+1) + 8\Phi - 5 = -3\Phi - 3 + 8\Phi - 5 = 5\Phi - 8 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir alle nötigen Zutaten, um unsere Tabelle mit den »vereinfachten« Potenzen von Φ zu vervollständigen, und sehen, dass sich die Fibonacci-Zahlen wie zu erwarten im negativen Bereich nahtlos fortsetzen. Auch das Muster der alternierenden Vorzeichen ist uns erhalten geblieben:

$$
\begin{array}{lcrcr}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\Phi^{-10} & =- & 55\Phi & + & 89 \\
\Phi^{-9} & = & 34\Phi & - & 55 \\
\Phi^{-8} & =- & 21\Phi & + & 34 \\
\Phi^{-7} & = & 13\Phi & - & 21 \\
\Phi^{-6} & =- & 8\Phi & + & 13 \\
\Phi^{-5} & = & 5\Phi & - & 8 \\
\Phi^{-4} & =- & 3\Phi & + & 5 \\
\Phi^{-3} & = & 2\Phi & - & 3 \\
\Phi^{-2} & =- & 1\Phi & + & 2 \\
\Phi^{-1} & = & 1\Phi & - & 1 \\
\Phi^{\pm 0} & =\pm & 0\Phi & + & 1 \\
\Phi^{1} & = & 1\Phi & \pm & 0 \\
\Phi^{2} & = & 1\Phi & + & 1 \\
\Phi^{3} & = & 2\Phi & + & 1 \\
\Phi^{4} & = & 3\Phi & + & 2 \\
\Phi^{5} & = & 5\Phi & + & 3 \\
\Phi^{6} & = & 8\Phi & + & 5 \\
\Phi^{7} & = & 13\Phi & + & 8 \\
\Phi^{8} & = & 21\Phi & + & 13 \\
\Phi^{9} & = & 34\Phi & + & 21 \\
\Phi^{10} & = & 55\Phi & + & 34 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&1\Phi^{0} &&= \mathbf{2} \quad (1)\\
&1\Phi^{1} &&= \mathbf{\Phi}\\
&1\Phi^{2} - 2\Phi^{0} &&= \mathbf{\Phi^{-1}}\\
&1\Phi^{3} - 3\Phi^{1} &&= -\mathbf{\Phi^{-1}}\\
&1\Phi^{4} - 4\Phi^{2} + 2\Phi^{0} &&= -\mathbf{\Phi}\\
&1\Phi^{5} - 5\Phi^{3} + 5\Phi^{1} &&= -\mathbf{2}\\
&1\Phi^{6} - 6\Phi^{4} + 9\Phi^{2} - 2\Phi^{0} &&= -\mathbf{\Phi}\\
&1\Phi^{7} - 7\Phi^{5} + 14\Phi^{3} - 7\Phi^{1} &&= -\mathbf{\Phi^{-1}}\\
&1\Phi^{8} - 8\Phi^{6} + 20\Phi^{4} - 16\Phi^{2} + 2\Phi^{0} &&= \mathbf{\Phi^{-1}}\\
&1\Phi^{9} - 9\Phi^{7} + 27\Phi^{5} - 30\Phi^{3} + 9\Phi^{1} &&= \mathbf{\Phi}\\
&1\Phi^{10} - 10\Phi^{8} + 35\Phi^{6} - 50\Phi^{4} + 25\Phi^{2} - 2\Phi^{0} &&= \mathbf{2}\\
&1\Phi^{11} - 11\Phi^{9} + 44\Phi^{7} - 77\Phi^{5} + 55\Phi^{3} - 11\Phi^{1} &&= \mathbf{\Phi}\\
&1\Phi^{12} - 12\Phi^{10} + 54\Phi^{8} - 112\Phi^{6} + 105\Phi^{4} - 36\Phi^{2} + 2\Phi^{0} &&= \mathbf{\Phi^{-1}}\\
&1\Phi^{13} - 13\Phi^{11} + 65\Phi^{9} - 156\Phi^{7} + 182\Phi^{5} - 91\Phi^{3} + 13\Phi^{1} &&= -\mathbf{\Phi^{-1}}\\
&1\Phi^{14} - 14\Phi^{12} + 77\Phi^{10} - 210\Phi^{8} + 294\Phi^{6} - 196\Phi^{4} + 49\Phi^{2} - 2\Phi^{0} &&= -\mathbf{\Phi}\\
&1\Phi^{15} - 15\Phi^{13} + 90\Phi^{11} - 275\Phi^{9} + 450\Phi^{7} - 378\Phi^{5} + 140\Phi^{3} - 15\Phi^{1} &&= -\mathbf{2}\\
&1\Phi^{16} - 16\Phi^{14} + 104\Phi^{12} - 352\Phi^{10} + 660\Phi^{8} - 672\Phi^{6} + 336\Phi^{4} - 64\Phi^{2} + 2\Phi^{0} &&= -\mathbf{\Phi}\\
&1\Phi^{17} - 17\Phi^{15} + 119\Phi^{13} - 442\Phi^{11} + 935\Phi^{9} - 1122\Phi^{7} + 714\Phi^{5} - 204\Phi^{3} + 17\Phi^{1} &&= -\mathbf{\Phi^{-1}}\\
&1\Phi^{18} - 18\Phi^{16} + 135\Phi^{14} - 546\Phi^{12} + 1287\Phi^{10} - 1782\Phi^{8} + 1386\Phi^{6} - 540\Phi^{4} + 81\Phi^{2} - 2\Phi^{0} &&= \mathbf{\Phi^{-1}}\\
&1\Phi^{19} - 19\Phi^{17} + 152\Phi^{15} - 665\Phi^{13} + 1729\Phi^{11} - 2717\Phi^{9} + 2508\Phi^{7} - 1254\Phi^{5} + 285\Phi^{3} - 19\Phi^{1} &&= \mathbf{\Phi}\\
&1\Phi^{20} - 20\Phi^{18} + 170\Phi^{16} - 800\Phi^{14} + 2275\Phi^{12} - 4004\Phi^{10} + 4290\Phi^{8} - 2640\Phi^{6} + 825\Phi^{4} - 100\Phi^{2} + 2\Phi^{0} &&= \mathbf{2}\\
&1\Phi^{21} - 21\Phi^{19} + 189\Phi^{17} - 952\Phi^{15} + 2940\Phi^{13} - 5733\Phi^{11} + 7007\Phi^{9} - 5148\Phi^{7} + 2079\Phi^{5} - 385\Phi^{3} + 21\Phi^{1} &&= \mathbf{\Phi}
\end{aligned}
$$

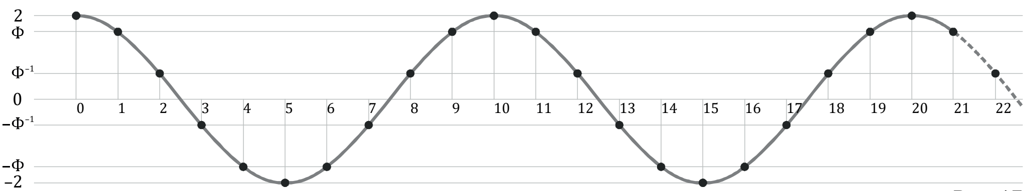


Bild 17

Die Cosinuskurve (ich nenne sie jetzt nicht mehr »Schlangenlinie«) ist wieder sichtbar! Mit gleicher Amplitude, allerdings anderer Periodenlänge! Die Periodenlänge (Abstand zwischen zwei Maximalwerten) beträgt nun nicht mehr 6 sondern 10. Und auch die Punkte liegen wie vorhin *exakt* auf der Cosinuskurve! Wir überprüfen das:

Zunächst stellen wir fest, dass die einzelnen Punkte in horizontaler Richtung (hier sind die Winkelgrade auf dem Einheitskreis aufgetragen) je 36° Abstand zueinander aufweisen.

$$\frac{360°}{10} = 36°$$

Tippen wir die Grad-Werte an diesen Stellen in den Taschenrechner ein, erhalten wir folgende Ergebnisse:

«| Nein, so schlimm ist es nicht. Aber für größere Diagramme kann es schon sein, dass sich mein Computer ein paar Stunden lang ins Zeug legen muss.

|» Dann verhelfen wir ihm gleich zu ein paar vergnüglichen Rechenstunden. Ich würde gerne einen Probegalopp mit der Basiszahl 1,5 machen.

~~~ ~~~ Etwas später ~~~ ~~~

«| Schau her. Ich habe die Punkte, die eine 1 darstellen, in Form von schwarzen Quadraten dargestellt:

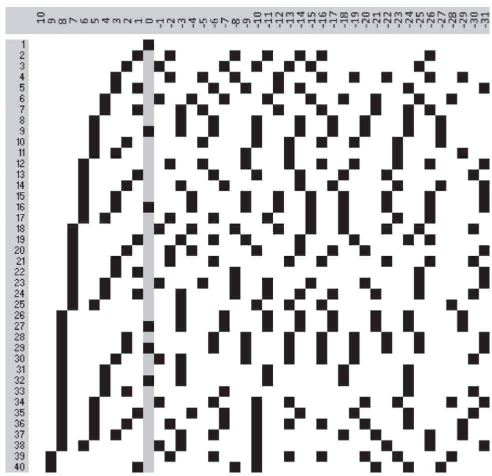


Bild 17: Basis = 1,5

Oberhalb davon habe ich die Potenzen aufgetragen, links siehst du die natürlichen Zahlen, die ich berechnet habe. In dem Muster habe ich die ganzen Zahlen von 1 bis 40 im »Dualsystem« mit der Basis 1,5 dargestellt. Picken wir uns die Dezimalzahl 19 etwas vergrößert heraus:

Bild 18

|» Genau so habe ich mir das vorgestellt! Allerdings ist die Genauigkeit noch nicht so hoch wie von mir gewünscht.

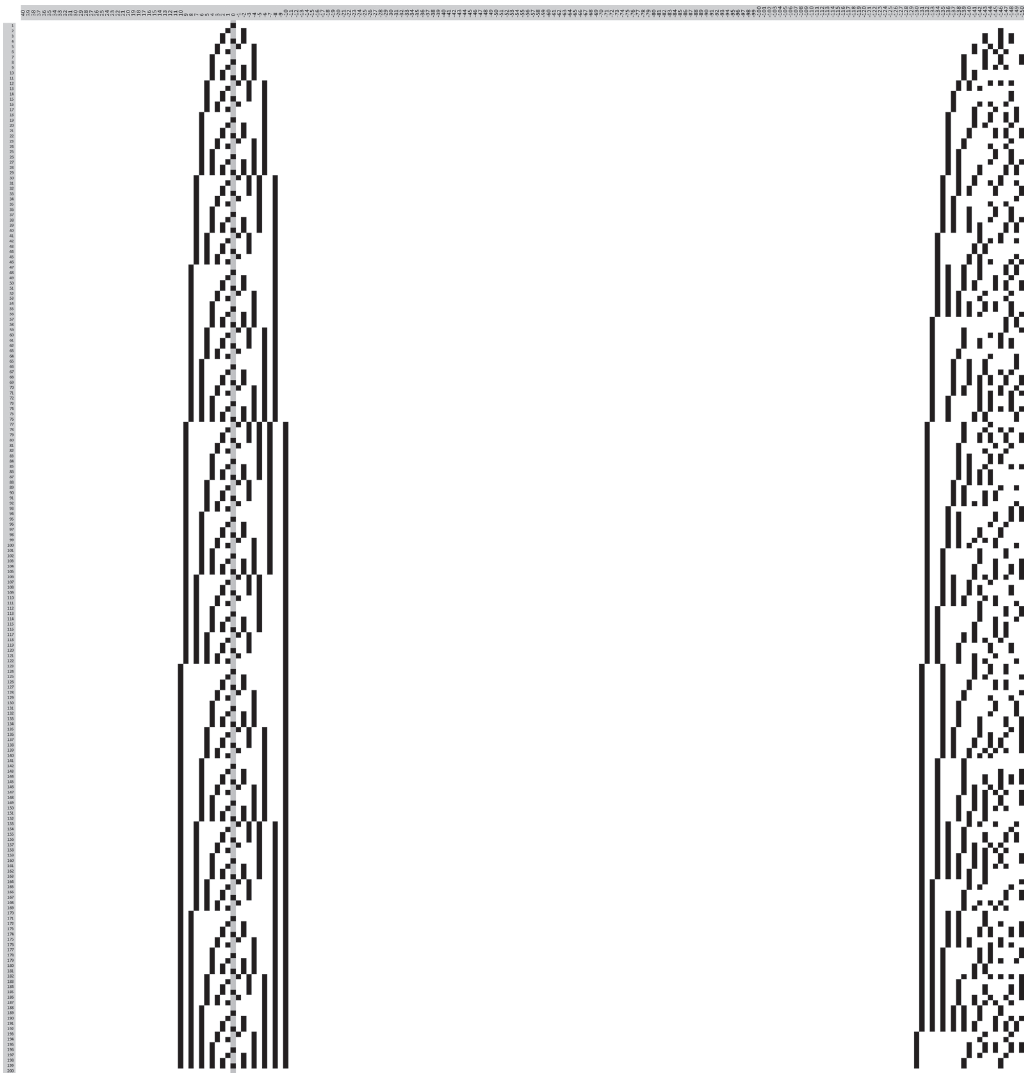


Bild 58: Basis = 1,618033988749894848204586834365 (30 Stellen nach dem Komma)

Bei einer Genauigkeit von 30 Stellen nach dem Komma ist der Graben bereits recht groß, und alleine aufgrund des Musters können wir sofort sehen, dass die Basiszahl ganz knapp *kleiner* als Φ ist. Außerdem weist der »Schatten« auf der rechten Seite eine große Ähnlichkeit mit dem »Original« auf.

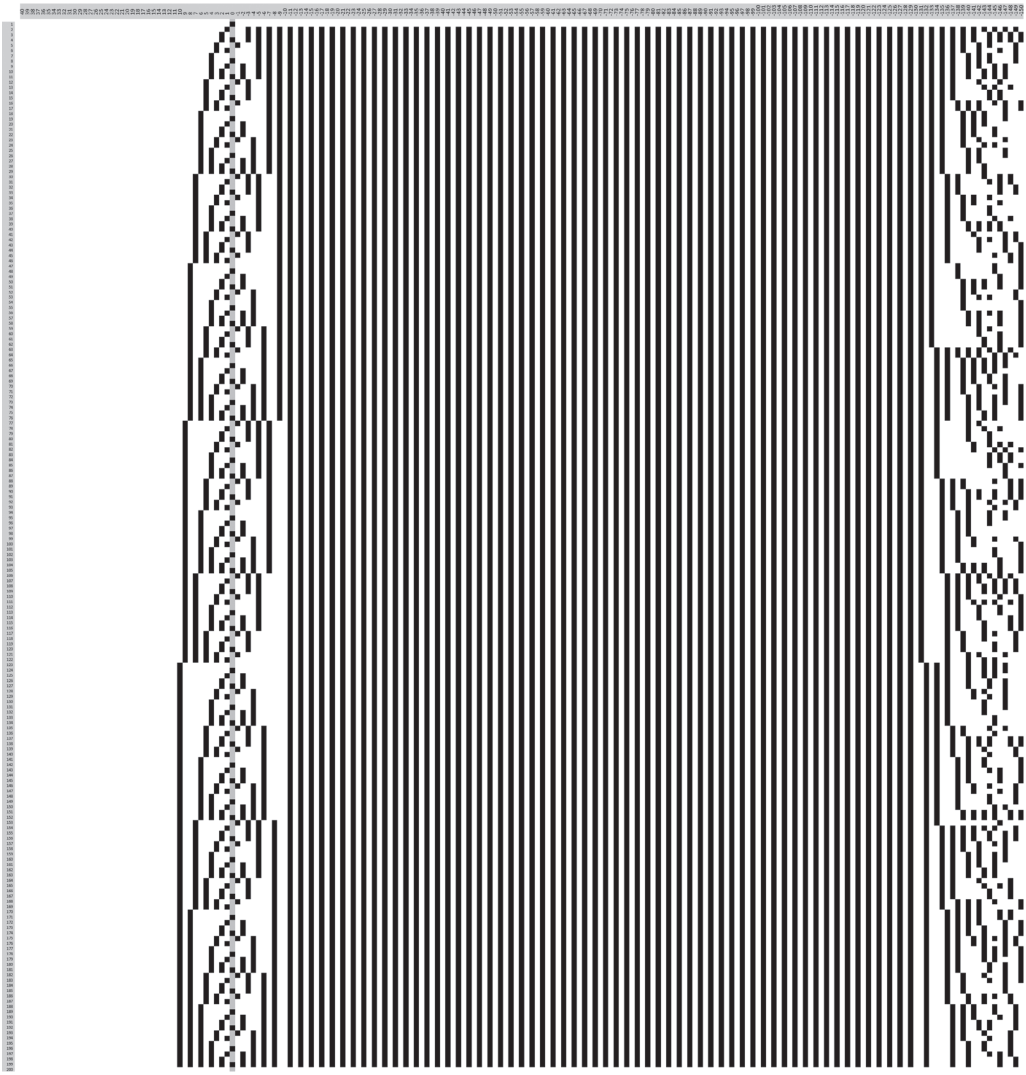


Bild 59: Basis = 1,618033988749894848204586834366 (30 Stellen nach dem Komma)

Hier wurde zum Vergleich die Basiszahl an der 30. Stelle nach dem Komma um eine Ziffer erhöht. Sofort ist der »Graben« mit durchgehenden Streifen gefüllt.

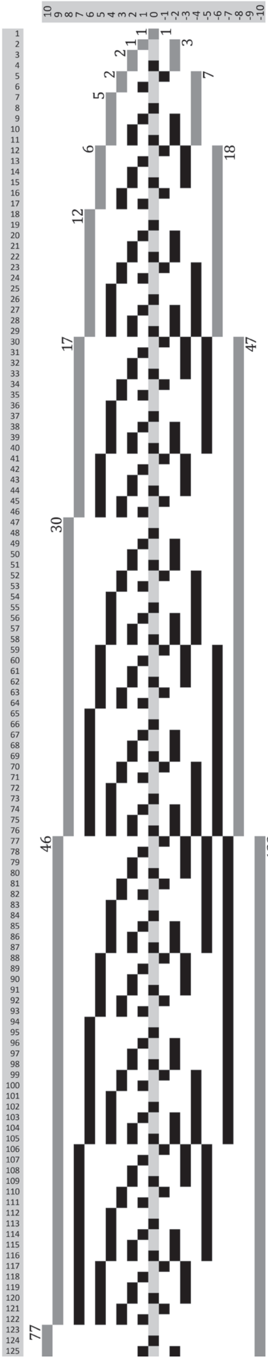


BILD 63

«| Alles hat seine Richtigkeit! Die »Φ-Anteile« werden jeweils 0, sodass nur die ganzzahligen Anteile übrigbleiben, und diese ergeben immer genau die gesuchte ganze Zahl.

|» Wie lang sind denn die einzelnen »Streifen« in unserem Muster? Gibt es in dieser Hinsicht eine bestimmte Gesetzmäßigkeit?

«| Ja, die gibt es. Ich habe in BILD 63 für's Erste die Länge der Streifen der äußeren »Hülle« eingetragen. Was sofort zu sehen ist, ohne dass man die Längen abzählen muss: Die Hüllstreifen auf der »Innenseite« (rechts von der Nulllinie, unterhalb der negativen Potenzen) haben jeweils die Länge der zwei gegenüberliegenden Streifen auf der »Außenseite«. Wenn man die Länge der Streifen misst, dann stellt sich heraus, dass »außen« die Längen jeweils abwechselnd um 1 größer oder um 1 kleiner als die Zeilensummen im Phi-Dreieck sind (TABELLE 4 auf Seite 45). Diese Zeilensummen entsprechen auch, wie wir bereits wissen, den ganzzahlig gerundeten Potenzen von Φ bzw. den Gliedern der Lucas-Folge.

$$\begin{aligned}
1 &= 2-1\\
2 &= 1+1\\
2 &= 3-1\\
5 &= 4+1\\
6 &= 7-1\\
12 &= 11+1\\
17 &= 18-1\\
30 &= 29+1\\
46 &= 47-1\\
77 &= 76+1\\
&\vdots \quad \vdots
\end{aligned}$$

|» Du hast in deiner Liste den Wert für die erste 1 nicht eingetragen! BILD 63 beginnt mit 1 • 1 • 2 • 2 • 5 • 6 • 12 ..., deine Liste jedoch mit 1 • 2 • 2 • 5 • 6 • 12 ...

«| [*Seufzt*] Du hast wie meistens recht. Aber der Wert, der dort hingehört, hat mich ein wenig irritiert.

|» Das ist noch lange kein Grund, ihn heimlich unter den Tisch fallen zu lassen. »Anfangswerte« in unseren Reihen, Tabellen und Bildern sind ohnehin meistens irgendwelche »Löcher« oder nehmen gleichzeitig unterschiedliche Werte an.

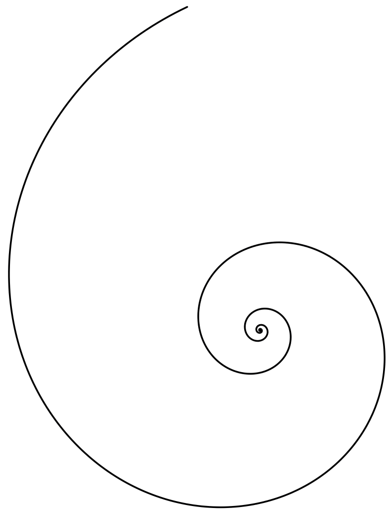
«| Das ist auch hier der Fall. Der Wert an der ersten Stelle ist nämlich 0:

$$\begin{array}{rl} 1 = & -1+1=0 \\ 1 = & \;\;2-1 \\ 2 = & \;\;1+1 \\ 2 = & \;\;3-1 \\ 5 = & \;\;4+1 \\ 6 = & \;\;7-1 \\ \vdots & \;\;\vdots \end{array}$$

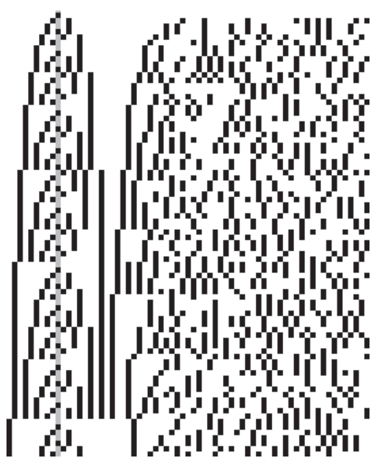
Auf der »Innenseite« entsprechen die Streifenlängen übrigens genau den jeweils zweiten Werten der Lucas-Folge. Und der erste Wert ist konsequenterweise auch wieder »falsch«:

$$\begin{array}{rcr} 2 & \to & 1 \\ 1 & & \\ 3 & \to & 3 \\ 4 & & \\ 7 & \to & 7 \\ 11 & & \\ 18 & \to & 18 \\ 29 & & \\ 47 & \to & 47 \\ 76 & & \\ 123 & \to & 123 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Egal, wie weit du dich entfernst oder wie nah du herantrittst –
die Form ändert sich nicht.



Erst wenn du genügend tief hineinblickst,
beginnst du den fehlenden Teil der Form zu erkennen, ...



... jenen Teil auf der »anderen Seite«, der gewöhnlich »verschleiert« ist.